**נושא 11 – עצים בינארים**

**עץ**  – עץ הוא מקרה פרטי של גרף, גרף פשוט קשיר חסר מעגלים, מסמנים אותו .

**צומת** – איבר בתוך העץ.

**מסלול** – סדרת קודקודים בגרף בה כל שני קודקודים סמוכים מחוברים ע"י צלע בגרף.

**אב** – צומת שיוצא ממנו צלע לצומת אחר.

***בן*** *– צומת שיש לו אב.*

***שורש*** *– צומת יחיד בעץ שאין לו אב (הצומת הראשון בעץ).*

***עלה*** *– צומת אשר אין לו בנים.*

***צומת פנימי***  *– צומת אשר אינו עלה.*

***עומק צומת***  *– מרחק (מספר צלעות) מצומת השורש (סופרים מלמעלה מ-0).*

***גובה***  *– המרחק (מספר צלעות) המקסימאלי של צומת עד העלה הרחוק ביותר (בתת העץ שלו) (סופרים מלמטה מ-0).*

***גובה העץ*** *– המרחק (מספר הצלעות) המקסימאלי מצומת השורש עד העלה האחרון.*

***שכנים*** *– צמתים שיש להם אותו אב.*

***עץ בינארי מלא*** *– עץ שבו כל צומת שאינו עליה יש 2 בנים.*

***עץ בינארי שלם*** *– עץ בו כל העלים באותה רמה, או לכל העלים יש אותו עומק.*

***הבדל בין עומק לגובה:***

***טענה:***

*מספר הצמתים בעומק (ברמה ) בעץ בינארי שלם שווה .*

*הוכחה באינדוקציה:*

*בסיס האינדוקציה: עבור יש קודקוד אחד שהוא שורש העץ, ,*

*הנחת האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור כלשהו כלומר בעומק יש צמתים.*

*הוכחה: נוכיח כי הטענה נכונה עבור , כלומר יש להוכיח כי ברמה יש צמתים.*

*בעץ בינארי מלא מספר הצמתים בכל רמה בעץ גדול פי שניים מהרמה הקודמת, לכן ברמה יש .*

***מסקנה 1:***

*בעץ בינארי שלם בגובה יש צמתים.*

*הוכחה:*

*יש לסכום את מספר הצמתים בכל רמות העץ: .*

***מסקנה 2:***

*קיבלנו ש-, מכאן אפשר לחץ את : או .*

***דוגמאות לשימוש בעצים:***

* *מבנה היררכי של אוניברסיטה.*
* *סידור תקיות וקבצים במחשב .*

***הגדרה של עץ בינארי:*** *עץ אשר מספר הבנים שיש לכל צומת אינו עולה על 2.*

***שיטות מעבר על עץ בינארי:***

*אחת מן הפעולות המוגדרות על עץ בינארי היא מעבר על כל איבריו, מטרתו של המעבר היא לבצע פעולה כלשהי על כל צמתי העץ, למשל, להדפיס את כל צמתי העץ, חיפוש איבר מסויים ועוד.*

*קיימות שלושה שיטות מעבר:*

* *– עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את ערכו, לאחר מכן לעבור לבנו השמאלי ולבסוף לבן הימני:*

*.*

* *– עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את הבן השמאלי, לאחר מכן לעבור לערכו שלו ולבסוף לבן הימני:*

*.*

* *– עבור כל צומת יש להדפיס תחילה את בנו השמאלי, אחר כך את בנו הימני ולבסוף את ערכו שלו:*

*.*

***ייצוג ביטויים ארימטיים באמצעות עץ בינארי:***

*אחד מן הביטויים הנפוצים לעץ בינארי הוא ייצוג ביטויים ארימטיים, בביטוי ארימטי יש אופרנדים, ועל כל שני אופרנדים פעול אופרטור מסויים, לכן אפשר לייצג כך:*

*בכל צימת יש אופרטור, יש שני בנים אופרנדים, שהאב פועל עליהם, כדי לפתח את הביטוי מתשתמשים באמצעות .*

**עץ חיפוש בינארי :**

*עץ חיפוש בינארי הוא עץ בינארי שהאיברים בו ממוינים, מבנה זה מאפשר למצוא נתון במהירות גבוהה בהרבה יותר מאשר באחסון במנה נתונים לינארי.*

***הגדרה:***

*כל איבר בצומת של עץ חיפוש בינארי גדול מאיברי תת-עץ השמאלי וקטן ומאיברי תת-עץ הימני.*

***עץ נבנה על פי קלט:***

*הקלט הראשון נכנס לשורש, ולאחריו כל קלט מתנתב למקומו, לפי הבדיקה הבאה: אם הוא גדול מהצומת – ימינה, אם הוא קטן מהצומת – שמאלה.*

***חשוב -*** *כאשר עוברים על העץ בסדר מקבלים סדרה של איברים ממוינים.*

***המקרה הטוב:***

*עץ בינארי מושלם הוא עץ שבו כל הצמתים, מלבד העלים יש שני בנים בדיוק, ועלים כולם נמצאים באותה רמה.*

***טענה 1:***

*בעץ חיפוש בינארי מושלם, ברמה שמרחקה עד השורש הוא יש צמתים.*

*הוכחה באינדוקציה:*

*בסיס האינדוציה: עבור , העץ מורכב משורש בלבד, מספר הצמתים הוא .*

*הנחת האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור , כלומר מספר הצמתים ברמה שמרחקה עד השורש הוא שווה .*

*הוכחת האינדוקציה, נוכיח כי הטענה נכונה עבור כלומר מספר הצמתים שמרחקה עד השורש הוא שווה , אמנם לכל צומת ברמה יש שני בנים, לכן מספר צמתים ברמה שווה לפי הנחת האינדוקציה: .*

***מסקנה:***

*בעץ מושלם בגובה יש עלים.*

***טענה 2:***

*בעץ חיפוש בינארי מושלם, בגובה , יש צמתים.*

*הוכחה:*

*מספר צמתים בעץ בינארי מושלם שווה לסכום צמתים בכל הרמות.*

*לפי טענה 1 ניתן לכתוב כי , מכאן נובע כי בהינתן מספר צמתים של עץ מושלם הגובה שלו שווה .*

***מסקנה:***

*מספר מקסימאלי של צמתים בעץ חיפוש בינארי לא עלה על , כאשר הוא גובה העץ, לכן סיבוכיות של חיפוש איבר בעץ חיפוש בינארי מושלם היא .*

***במקרה הטוב:***

*כאשר עץ חיפוש בינארי קרוב למושלם, סיבוכיות של חיפוש איבר היא .*

***בהוספת איבר חדש לעץ חיפוש בינארי:***

*במקרה הטוב (עץ חיפוש בינארי קרוב למושלם) אנו מחפשים מקום להוספת איבר לפי רמות העץ, לכן הסיבוכיות היא כיוון שנצטרך לעבור רק על מסלול אחד בגובה העץ כדי להוסיף איבר.*

***במקרה הגרוע:***

*בעץ אינו מושלם, הסבוכיות משתנה, לדוגמא: בעץ שכל איבריו מסודרים כבנים ימניים, גובה עץ הוא כמספר האיברים פחות אחד, לפיכך הסיבוכיות לינארית במבנה כזה ,לדוגמא: העץ נבנה מנתונים שהמסודרים בסדר עולה.*

***מחיקת איבר:***

*היא פעולה המסובכת מכולם, מכיוון שבמחיקת איבר אנו עלולים להרוס את מיונו של העץ, על מנת למחוק איבר עלינו תחילה למצוא את האיבר ואז קיימות 4 אפשרויות לפעול לפי מצב נתון:*

1. *האיבר אינו נמצא – אין צורך לבצע מחיקה.*
2. *האיבר הוא עלה – צריך למחוק אותו לשים במקומו .*
3. *היבר הוא צומת פנימי שיש לו רק בן אחד- למחוק אותו ולהעביר את בנו במקומו.*
4. *הוא הוא צומת פנימי ויש לו שני בנים, לא ניתן להעביר את אחד הבנים במקומו, מכיוון שהעברה כזו תגרום לשיבוש המיון כלפי מטה, אנו נשאף להעביר במקום הצומת שעובד להמחק איבר שיקיים את התנאי שיהיה גדול מתת-עץ הימני שלו וקטן מתת-עץ השמאלי שלו, איבר זה הוא או:*
5. *איבר הקטן ביותר בתת העץ הימני,*
6. *איבר הגדול ביותר בתת-עץ השמאלי.*

*פונקציה למחיקת איבר:*

*במחיקת איבר שיש לו 2 בנים יש להתבונן בשני מקרים:*

1. *לבן הימני שלו יש רק בן יחד – במקרה כזה מחליפים אותו בבן היחיד שלו,*
2. *לבן הימיני שלו יש שני בנים:*

*סיבוכיות פעולת המחיקה: זהה לסיבוכיות חיפוש איבר, כיוון שגם במחיקת איבר קודם יש למצוא והחיפוש נע על פני גובה העץ, כאשר האיבר נמצא, בודקים את תנאי המחיקה - . גם במקרה של מחיקת איבר שלבן הימני שלו יש שני בנים הסיבוכיות אינה משתנה, מכיוון שממשיכים לנוע במתכונת החיפוש, לכן בסה"כ הסיבוכיות במקרה הטוב היא: .*

***הערה מהתרגול*** *– בעץ חיפוש בינארי אם רוצים להדפיס אותו בצורה ממויינת משתמשים ב-.*

***סיכום עץ בינארי מושלם:***

*מספר כולל של קודקודים בעץ מושלם הינו (כאשר גובה העץ), איך מוכיחים?*

*מוכיחים ככה (סכום סדרה הנדסית):*

*או שמוכיחים באינדוקציה.*

*מספר עלים בעץ בינארי מושלם הוא ,*

*מספר הצמתים הפנימיים בעץ בינארי מושלם הוא*

*מספר הצמתים הכולל בעץ בינארי שלם הוא בין ל-.*